

Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα

(Προφορική παρουσίαση)

**Μ. Διονυσίδου, Χ. Κατσούλης, Μ. Μανιάτης, Α. Μήτσης, Χ. Μωραΐτης,
Α. Ναυπλιώτου, Γ. Νιάρχου, Δ. Ξαγοράρη, Β. Ξυμιαλή, Π. Πανίδου,
Α. Παπά, Ε. Παπαγρηγορίου, Χ. Παπαδάκης, Σ. Παπέλης, Α. Παπούλης,
Α. Περιστερή, Ε. Πουρνάρα, Β. Ρεμαντάς, Τ. Σαΐτη, Α. Σακελλαρίδης,
Γ. Σπυρόπουλος, Ι. Στέκερ, Δ. Στεφάνου, Μ. Στρατιδάκης, Ο. Τζατζάνης,
Η. Τσαβαρή, Ν. Φαράκλας.**

Πρότυπο Γυμνάσιο της Ιωνιδείου Σχολής Πειραιά (ΠΓΙΣΠ)

Επιβλέπουσες Καθηγήτριες:

Αρχοντάκη Αθανασία, ΠΓΙΣΠ, Καθήτρια Αγγλικών, archontakiathanasia@yahoo.com

Παχούλη Αγνή, ΠΓΙΣΠ, Καθηγήτρια Πληροφορικής, agpachouli@gmail.com

Τριπολιτάκη Μαρίνα, ΠΓΙΣΠ, Καθηγήτρια Μαθηματικών, marina.tripolitaki@gmail.com

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να παντρέψουμε πέντε κορίτσια με πέντε αγόρια. Ας υποθέσουμε επίσης ότι ζούμε σε μία μητριαρχική κοινωνία όπου ο λόγος των γυναικών υπερέχει εκείνου των αντρών, οπότε καταγράφουμε τις επιθυμίες μόνο των κοριτσιών. Κάθε αγόρι θα δεχτεί να παντρευτεί όποιο κορίτσι το επιλέξει. Ενδιαφερόμαστε όμως για ένα πλήρες ταίριασμα, δηλαδή, με άλλα λόγια, να παντρέψουμε κορίτσια και αγόρια κατά τις επιθυμίες των κοριτσιών και να μη μείνει κορίτσι (αλλά ούτε και αγόρι) ανύπαντρο. Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως **πρόβλημα του γάμου** [1].

Η ύπαρξη ή μη λύσης στο παραπάνω πρόβλημα με τα ως άνω δεδομένα διαπιστώνεται εύκολα. Τι γίνεται όμως, αν τα δεδομένα αυξηθούν, λόγω χάρη αν τα κορίτσια γίνουν 100;

Προβλήματα τέτοιας φύσεως απασχόλησαν τον Phillip Hall, ο οποίος έδωσε θεωρητική απάντηση το 1935 [1] (απόδειξη με χρήση μαθηματικής επαγωγής), ενώ οι αλγοριθμικές λύσεις ήρθαν πολύ αργότερα [4] και πλέον υπάρχουν πολλές μεταγραφές σε γλώσσες προγραμματισμού (πχ δεξ [5]).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ύπαρξης πλήρους ταιριάσματος σε διμερή γραφήματα, στοχευμένα, μέσα από παραδείγματα και κατασκευάζουμε αλγοριθμικά λύσεις. Στη συνέχεια περιγράφουμε τον κώδικα που υλοποιήσαμε στο προγραμματιστικό περιβάλλον του Scratch¹, για τις περιπτώσεις όπου το initial matching (που δεν εισάγεται από τον χρήστη, αλλά υπολογίζεται δυναμικά) αφήνει αταίριαστο το πολύ ένα ζευγάρι κορυφών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στο Scratch δεν μπορούν να οριστούν διδιάστατοι πίνακες και pointers, θέτοντας όρια εκ των προτέρων στη συγγραφή κώδικα και, στην περίπτωση μας τον περιπλέκει. Παραμένει, ωστόσο, ένα αξιόλογο εργαλείο εισαγωγής των μαθητών στον κόσμο των αλγόριθμων και του προγραμματισμού.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: αλγόριθμοι, γραφήματα, θεώρημα Hall.

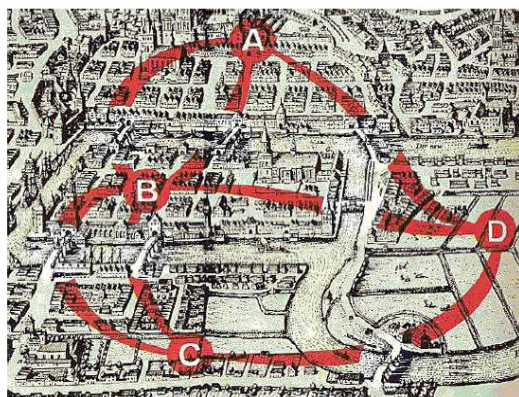
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πότε λύνεται το πρόβλημα του γάμου; Αν λύνεται, μπορεί να κατασκευαστεί μία λύση; Μετά τον Hall [1], γνωρίζουμε ότι για να παντρευτούν όλα τα κορίτσια κατά τις επιθυμίες τους, πρέπει και αρκεί, οι επιθυμίες οποιουδήποτε υποσυνόλου κοριτσιών να είναι τουλάχιστον όσα και τα κορίτσια. Με άλλα λόγια, πρέπει και αρκεί:

- ένα οποιαδήποτε κορίτσια να επιθυμεί τουλάχιστον ένα αγόρι
- δύο οποιαδήποτε κορίτσια να επιθυμούν τουλάχιστον δύο αγόρια
- τρία οποιαδήποτε κορίτσια να επιθυμούν τουλάχιστον τρία αγόρια κτλ.

Προχωράμε με μία μικρή εισαγωγή στη θεωρία των γραφημάτων, τη μαθηματική θεωρία πίσω από τις αναζητήσεις αυτού του άρθρου ([2], [3], [4]). Αρχικά, παρουσιάζουμε το πρόβλημα που από τους ιστορικούς θεωρείται ότι η προσπάθεια επίλυσής του στάθηκε η αιτία της γέννησης της θεωρίας αυτής.

Οι 7 γέφυρες του Königsberg [2]. Στα μέσα του 18^{ου} αιώνα υπήρχε στην τότε Πρωσία μια πόλη που ονομαζόταν Königsberg (το σημερινό Kaliningrad της Ρωσίας), την οποία διατρέχει το ποτάμι Pregel. Σε αυτό το ποτάμι υπάρχουν δύο μικρά νησιά τα οποία αποτελούν μέρος της πόλης και συνολικά 7 γέφυρες που συνδέουν τα ηπειρωτικά και νησιωτικά μέρη μεταξύ τους. Λέγεται ότι οι άνθρωποι στην πόλη διασκέδαζαν με το παρακάτω πρόβλημα: Ξεκινώντας από οποιοδήποτε σημείο A,B,C ή D όπως στο σχήμα 1, είναι δυνατόν να βρεθεί διαδρομή που να περνά από κάθε μία από τις επτά γέφυρες ακριβώς μία φορά και να επιστρέφει στο σημείο που ξεκίνησε; Κανείς δεν μπορούσε να βρει μία τέτοια διαδρομή, κανείς όμως δεν μπορούσε και να αποδείξει ότι δεν υπάρχει.

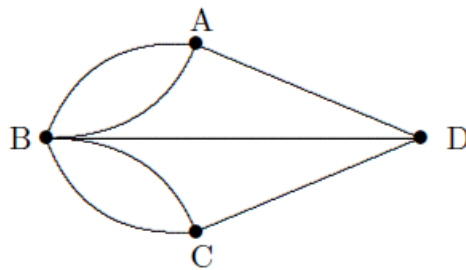


Σχήμα 1.



Το 1736, ο Leonhard Euler (1707-1783), επισκέφτηκε την πόλη, βρήκε το πρόβλημα ενδιαφέρον και συνειδητοποίησε ότι η φύση του είναι πολύ διαφορετική από αυτή των προβλημάτων της παραδοσιακής γεωμετρίας. Μελέτησε το πρόβλημα και το γενίκευσε, ανεξάρτητα από τον αριθμό των νησιών, των όχθων και τον αριθμό των γεφυρών που τα συνδέουν και έλυσε το γενικευμένο πρόβλημα. Το εύρημά του, περιέχεται σε ένα άρθρο με τίτλο «Η λύση ενός προβλήματος που σχετίζεται με την γεωμετρία της θέσης» και δημοσιεύθηκε το 1736 [6]. Συνέπερανε ότι η λύση του προβλήματος είναι αδύνατη, για πρώτη φορά, με μαθηματικούς συλλογισμούς. Χρησιμοποίησε κορυφές (vertices) για να αναπαραστήσει νησιά και όχθες και ακμές (edges) για αναπαραστήσει τις γέφυρες. Η δύσκολη στην ανάγνωση γκραβούρα και το παρακάτω γράφημα (Σχήμα 2) μεταφέρουν ακριβώς την ίδια πληροφορία, μοναχά που το γράφημα

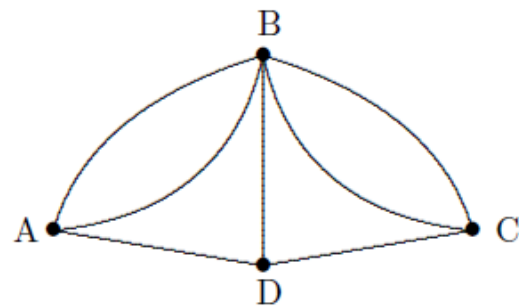
είναι απείρως πιο ευανάγνωστο.



Σχήμα 2.

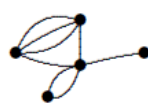
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ.

Το γράφημα του σχήματος 2 είναι σήμερα γνωστό ως πολυγράφημα (multigraph). Γενικά, ένα πολυγράφημα είναι ένα σύνολο κορυφών οι οποίες συνδέονται με μία ακμή ή έναν αριθμό ακμών. Για παράδειγμα, στο πολυγράφημα του σχήματος 2, οι κορυφές A και C δεν ενώνονται, οι κορυφές B και D συνδέονται από μία ακμή και οι κορυφές B και C ενώνονται από 2 ακμές. Οι θέσεις των κορυφών και τα μήκη των ακμών είναι αδιάφορα. Ενδιαφερόμαστε μονάχα για το αν συνδέονται μεταξύ τους δύο κορυφές, και αν ναι, πόσες φορές. Έτσι, ο χάρτης του σχήματος 1 και τα γράφημα των σχημάτων 2 και 3, είναι ισοδύναμα μεταξύ του (ισομορφικά).



Σχήμα 3.

Περισσότερα παραδείγματα πολυγραφημάτων δίνονται παρακάτω:



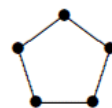
(a)



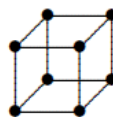
(b)



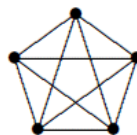
(c)



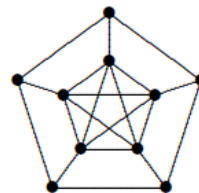
(d)



(e)



(f)



(g)

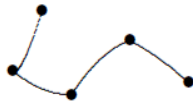
Σχήμα 4.

Από τα πολυγραφήματα του σχήματος 4, στο (a) ζευγάρια κορυφών συνδέονται με τουλάχιστον 2 ακμές. Στο καθένα από τα πολυγραφήματα (b) – (g), κάθε δύο κορυφές συνδέονται απ' το πολύ μία ακμή: τέτοια πολυγραφήματα ονομάζονται απλά γραφήματα ή για συντομία, γραφήματα. Έτσι κάθε γράφημα είναι ένα πολυγράφημα, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει.

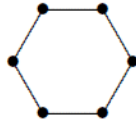
Έστω G πολυγράφημα, όπου V το σύνολο των κορυφών και E το σύνολο των ακμών του. Γράφουμε

$$G = (V, E).$$

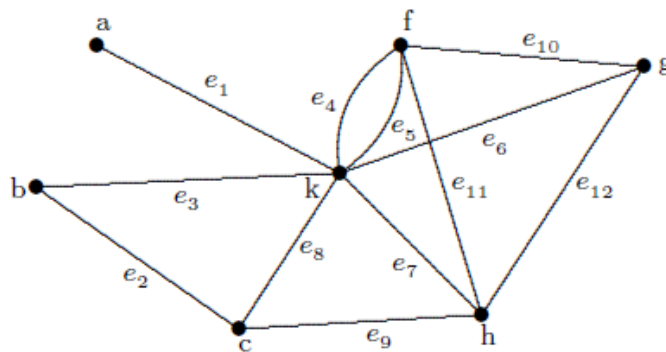
- Δύο κορυφές του G λέγονται γειτονικές αν συνδέονται με μία ακμή του G .
- Η γειτονιά μιας κορυφής είναι το σύνολο όλων των γειτονικών κορυφών της.
- Για κάθε S υποσύνολο του V ορίζουμε ως $N(S)$ το υποσύνολο του G που αποτελείται από τις κορυφές του G που γειτονεύουν με κορυφές από το S . Γράφουμε $|N(G)|$ για να δηλώσουμε το πλήθος των στοιχείων του $N(G)$.
- Διαδρομή (walk) είναι κάθε ακολουθία κορυφών και ακμών όπου κάθε κορυφή γειτονεύει με μία προηγούμενη και με μία επόμενη.
- Μονοπάτι (path) είναι κάθε διαδρομή που δεν επαναλαμβάνει τις ίδιες κορυφές και



- Κύκλος (cycle) είναι κάθε μονοπάτι που αρχίζει και τελειώνει στην ίδια κορυφή.



Για παράδειγμα, έστω το πολυγράφημα G του σχήματος 5. Έχει 7 κορυφές και 12 ακμές και $V = \{a, b, c, f, g, h, k\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{12}\}$.



Σχήμα 5.

Οι κορυφές a και k είναι γειτονικές, όμως η a και η b όχι. Η κορυφή a ανήκει (προσπίπτει) στην ακμή $e1$ αλλά όχι στην $e3$. Οι κορυφές a και k ενώνονται με την ακμή $e1$. Μπορούμε να γράψουμε: $e1 = a-k$, και να ονομάσουμε a και k τα δύο άκρα της $e1$.

Στο πρόβλημα του γάμου, τα κορίτσια και αγόρια συνθέτουν τις κορυφές ενός γραφήματος, ενώ οι επιθυμίες των κοριτσιών αποτελούν τις ακμές του.

ΔΙΜΕΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ.

Σε αυτήν την παράγραφο, δίνουμε τον ορισμό των διμερών γραφημάτων, ο οποίος παίζει κεντρικό ρόλο στα προβλήματα με τα οποία ασχολούμαστε.

Ένα γράφημα G λέγεται διμερές (bipartite) αν το σύνολο των κορυφών του είναι η ένωση δύο μη κενών ξένων μεταξύ τους συνόλων κορυφών $V1$ και $V2$, τέτοιων που, κάθε ακμή του G να έχει το ένα άκρο της στο $V1$ και το άλλο στο $V2$.

Τα παρακάτω γραφήματα είναι όλα διμερή.



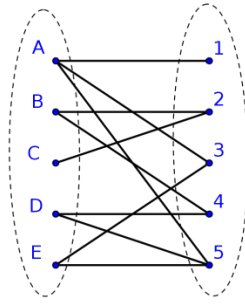
Στο πρόβλημα του γάμου τα κορίτσια και τα αγόρια αποτελούν κορυφές ενός γραφήματος, με $V1$ το σύνολο των κοριτσιών και $V2$ το σύνολο των αγοριών.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα το οποίο κινείται πάνω στη λογική του προβλήματος του γάμου, προκειμένου να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την έννοια του πλήρους ταιριάσματος αλλά και πως μπορούμε να φτάσουμε σε αυτήν.

Το πρόβλημα των επιλογών του κηπουρού. Ένας κηπουρός αποφάσισε να φυτέψει διάφορα καλλωπιστικά φυτά στις γλάστρες που ήταν άδειες στον κήπο που φρόντιζε. Οι άδειες γλάστρες ήταν διαφορετικού μεγέθους μεταξύ τους και τα φυτά που ήθελε να φυτέψει δε ταίριαζαν σε όλες τις γλάστρες. Για να μπορέσει να καταλήξει, έφτιαξε την παρακάτω λίστα, που περιγράφει ποια φυτά μπορούν να μπουν σε κάθε γλάστρα. Είναι εφικτό να φυτευτεί ακριβώς ένα τέτοιο φυτό σε κάθε γλάστρα, έτσι ώστε να έχει τελικά ο κηπουρός διαφορετικό φυτό σε κάθε γλάστρα;

POTS	A	B	C	D	E
FLOWERS	1,3,5	2,4	2	4,5	3,5

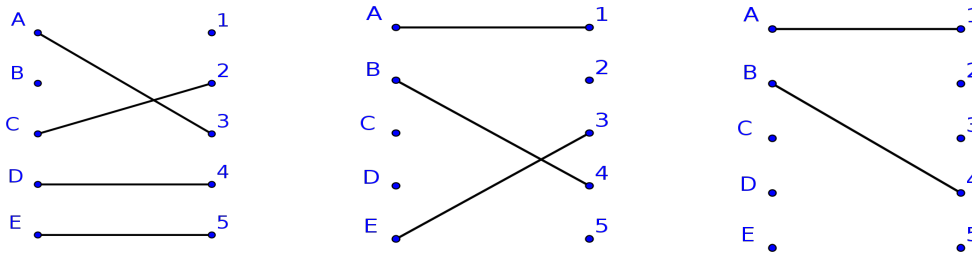
Είναι φανερό ότι ο παραπάνω πίνακας αντιστοιχεί στο διμερές γράφημα του σχήματος 6, όπου $V1 = \{A, B, C, D, E\}$, $V2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και οι ακμές συνδέουν γλάστρες με φυτά που μπορούν να δεχτούν.



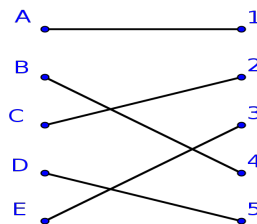
Σχήμα 6.

Ταιριάσματα και πλήρη ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα. Συνεχίζουμε με δύο πολύ χρήσιμες έννοιες:

- Ταίριασμα (matching) σε διμερές γράφημα $G = (V1 \cup V2, E)$ είναι μία ένα προς ένα αντιστοίχιση κάποιων ή όλων των κορυφών του $V1$ με εκείνες του $V2$. Ταϊριάσματα που προκύπτουν από το γράφημα του σχήματος 6 είναι μεταξύ άλλων τα ακόλουθα:



- Πλήρες ταίριασμα (complete matching) είναι κάθε ταίριασμα όπου περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Πλήρες ταιριάσματα του γραφήματος του σχήματος 6 είναι το παρακάτω. Αυτό, δεν είναι παρά μία λύση στο πρόβλημα των επιλογών του κηπουρού:



Σχήμα 7.

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το θεώρημα του Hall [1] στη γλώσσα των μαθηματικών:

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ HALL

Έστω $G = (V1 \cup V2, E)$ διμερές γράφημα, με $|V1|=|V2|$. Στο G υπάρχει πλήρες ταίριασμα, αν

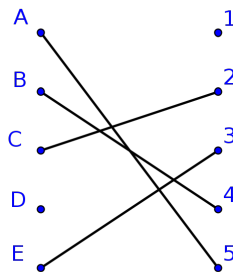
και μόνο αν, για κάθε υποσύνολο S του V_1 , είναι $|S| \leq |N(S)|$, όπου $N(S)$ οι γειτονικές κορυφές του S .

Πρέπει να επισημάνουμε ότι ο έλεγχος πλήρωσης των συνθηκών του θεωρήματος του Hall δεν είναι απλή υπόθεση, αφού για ένα σύνολο μεγέθους n απαιτούνται $2^n - 1$ υπολογισμοί. Όταν ικανοποιούνται δεδομένες συνθήκες, το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης, αλλά δεν την υπολογίζει. Στην επόμενη παράγραφο, επιγραμματικά, μέσα από παράδειγμα, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που οδηγεί στην κατασκευή λύσης (βλέπε [4]).

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΤΑΪΡΙΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΜΕΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Πραγματοποιώντας 2^{5-1} ελέγχους παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του θεωρήματος του Hall ικανοποιούνται στην περίπτωση των επιλογών του κηπουρού. Άρα υπάρχει λύση και για να τη βρούμε εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα :

Βήμα 1. Ξεκινάμε με ένα αρχικό ταίριασμα: (δηλαδή με μία πρώτη επιλογή. Κριτήρια σύμφωνα με τα οποία κατασκευάζουμε ένα πρώτο ταίριασμα θα τεθούν και θα αναλυθούν στην παράγραφο παρουσίασης του κώδικα).



Σχήμα 8.

Το αρχικό ταίριασμα του σχήματος 8, είναι ισοδύναμο με την ακολουθία ακμών: A-5, B-4, C-2, E-3.

Βήμα 2. Η κορυφή D δεν έχει ταίρι. Σύμφωνα όμως με το γράφημα 6, στην D θα μπορούμε να φυτέψουμε είτε το λουλούδι 4 είτε το λουλούδι 5. Στο αρχικό ταίριασμα, αντιστοιχίσαμε το λουλούδι 4 στη γλάστρα B, δηλαδή θεωρήσαμε την ακμή B-4. Διαγράφουμε αυτήν την ακμή, συμβολικά γράφουμε $B=4$ και δίνουμε το 4 στην D, δηλαδή σχηματίζουμε την ακμή D-4. Η B τώρα μένει ελεύθερη και την αντιστοιχούμε στο 2, αφαιρώντας παράλληλα το λουλούδι 2 από τη γλάστρα C. Μέχρι τώρα, έχουμε κάνει τις εξής κινήσεις:

$$D-4=B-2=C$$

Βήμα 3. Όμως, στην C δεν μπορούμε φυτέψουμε κάτι διαφορετικό από το 2. Οπότε, θα πρέπει να επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία από την αρχή και να αντιστοιχήσουμε στην γλάστρα D την άλλη της επιλογή, δηλαδή το λουλούδι 5. Επομένως το 5 φεύγει από την A και δίνουμε στην A την πρώτη της επιλογή, δηλαδή το λουλούδι 1. Δηλαδή:

$$D-5=A-1$$

Η παραπάνω ακολουθία αποτελεί ένα εναλλακτικό μονοπάτι (alternating path) για το γράφημα G.

Βήμα 4. Συνδυάζουμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου βήματος με τις ακμές του αρχικού ταιριάσματος που δεν έχουμε διαγράψει μέχρι τώρα και σχηματίζουμε την ακολουθία ακμών

A-1, B-4, C-2, C-5, E-3

Βήμα 5. Διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω ακολουθία δεν είναι παρά ένα πλήρες ταίριασμα και το πρόβλημα των επιλογών του κηπουρού έχει μόλις λυθεί.

Ο αλγόριθμος επιγραμματικά. Ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε συνοψίζεται στα ακόλουθα:

- **Βήμα 1.** Ξεκίνα από ένα οποιοδήποτε αρχικό ταίριασμα
- **Βήμα 2.** Ψάξε ένα εναλλακτικό μονοπάτι
- **Βήμα3.** Χρησιμοποίησε το εναλλακτικό μονοπάτι που μόλις βρήκες για να βελτιώσεις το αρχικό ταίριασμα. Αν δεν μπορείς να βρεις εναλλακτικό μονοπάτι, σταμάτησε.
- **Βήμα 4.** Συνδύασε τα ταιριάσματα που δημιούργησες από το προηγούμενο βήμα με αυτά που είχες στο αρχικό σου ταίριασμα. Βάλε μαζί τις ακμές του αρχικού ταιριάσματος που δεν έχεις πειράξει μέχρι τώρα.
- **Βήμα 5.** Αν βρήκες πλήρες ταίριασμα σταμάτα, διαφορετικά ξαναγύρνα στο βήμα 2.

Υλοποίηση σε περιβάλλον Scratch της αναζήτησης πλήρους ταιριάσματος σε διμερές γράφημα (Complete Matching)

Για την παρουσίαση του αλγόριθμου αναζήτησης πλήρους ταιριάσματος σε διμερές γράφημα, θα αναλυθούν τα επιμέρους βήματα επίλυσης του προβλήματος μέσω του παρακάτω παραδείγματος.

➤ **Το πρόβλημα**

Στοχεύοντας σε αποδοτικότερη λειτουργία της εταιρείας, ο Διευθυντής αποφάσισε να αναθέσει συγκεκριμένη εργασία/εργασίες σε κάθε υπάλληλο. Για δική του διευκόλυνση, έφτιαξε την παρακάτω λίστα που περιγράφει τις εργασίες μπορεί να διεκπεραιώσει κάθε υπάλληλος της εταιρείας. Είναι εφικτό το ταίριασμα ζευγαριών, έτσι ώστε κάθε υπάλληλος να αναλάβει μια διαφορετική εργασία;

PERSON	TASKS
A	5, 1, 3
B	2, 4
C	2
D	3, 1
E	3, 5

Η λύση

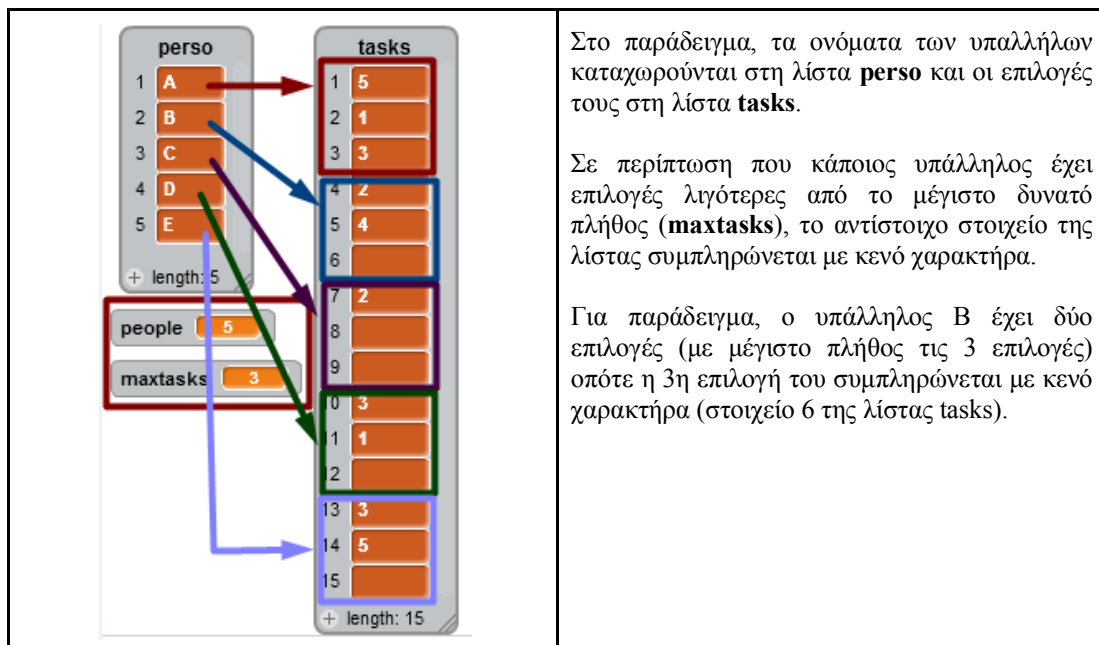
Το πρόγραμμα θα πρέπει να υλοποιεί τα εξής:

1. Αναζήτηση ατόμων με μία μόνο επιλογή και υποχρεωτικό ταίριασμα με την επιλογή αυτή.
2. Αναζήτηση επιλογής που ταιριάζει σε ένα μόνο άτομο. Εφόσον δεν συμπεριλαμβάνεται στις επιλογές των υπόλοιπων ατόμων, υποχρεωτικό ταίριασμα της επιλογής με το συγκεκριμένο άτομο.
3. Αρχικό ταίριασμα κάθε ατόμου με την πρώτη του επιλογή. Σε περίπτωση που η πρώτη επιλογή του δεν είναι διαθέσιμη, παραμένει αζευγάρωτος.

4. Αναζήτηση διαθέσιμης επιλογής για το αζευγάρωτο άτομο από το σύνολο των επιλογών του.
5. Αν δεν υπάρχει διαθέσιμη επιλογή για το αζευγάρωτο άτομο, αλλά μπορεί να αποδεσμευτεί μια επιλογή από κάποιο άλλο άτομο το οποίο έχει και άλλες δυνατές επιλογές, γίνεται αντιστοίχιση για το αζευγάρωτο άτομο.
6. Τα προηγούμενα βήματα επαναλαμβάνονται μέχρι να προκύψει πλήρες ταίριασμα ή να έχουν εξαντληθεί όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί ταιριασμάτων (εναλλακτικά μονοπάτια).

Ροή λειτουργιών προγράμματος και Ανάλυση των λειτουργιών

1. Με το πάτημα της πράσινης σημαίας καλείται η διαδικασία **Data Entry** όπου:
 - αρχικοποιούνται οι τιμές των μεταβλητών
 - διαγράφονται τα περιεχόμενα από όλες τις λίστες
 - ο χρήστης, μέσω σχετικών ερωτήσεων, εισάγει:
 - σε δύο ξεχωριστές λίστες τα υποσύνολα κορυφών **PERSON** και **TASKS** (δημιουργούνται οι λίστες **perso** και **tasks**)
 - το πλήθος των κορυφών για τις οποίες αναζητείται ταίριασμα (μεταβλητή **people**)
 - το μέγιστο δυνατό πλήθος επιλογών ανά κορυφή που αναζητά ταίριασμα (μεταβλητή **maxtasks**)



○

2. Στην επόμενη διαδικασία **Searching elements with only one choice** που καλείται:

- Γίνεται αναζήτηση των κορυφών για τις οποίες υπάρχει μία μόνο επιλογή και τις ταιριάζει αυτόματα με αυτή.
 - Για να εξακριβωθεί αν μία κορυφή έχει μόνο μία επιλογή, γίνεται καταμέτρηση των κενών επιλογών της κορυφής (μεταβλητή **2keno**).
 - Εάν η τιμή της μεταβλητής **2keno** είναι ίση με τη διαφορά του συνόλου των δυνατών επιλογών (μεταβλητή **maxtasks**) - 1, δηλαδή όλες οι επιλογές εκτός από μία είναι κενά, τότε:
 - Γίνεται έλεγχος διαθεσιμότητας της συγκεκριμένης επιλογής.

- Εάν η επιλογή είναι διαθέσιμη, η κορυφή και η αντίστοιχη επιλογή της προσθέτονται στις οριστικές λίστες **FINAL PERSONS** και **FINAL TASKS** (ταίριασμα). Επιπλέον, αντικαθίσταται η συγκεκριμένη κορυφή στη λίστα perso από κενό και τα στοιχεία της λίστας TASKS που είναι ίσα με την επιλογή που προστέθηκε στη λίστα FINAL TASKS αντικαθιστώνται με κενό. Η επιλογή αυτή δεν είναι πλέον διαθέσιμη για τους υπόλοιπους υποψηφίους.
 - Εάν η επιλογή δεν είναι διαθέσιμη, τότε υπάρχουν κορυφές που διεκδικούν την ίδια μοναδική επιλογή. Αυτό συνεπάγεται αδυναμία πλήρους ταιριάσματος και το πρόγραμμα ολοκληρώνεται.
- Σε αντίθετη περίπτωση, εάν δηλαδή υπάρχουν περισσότερες από μία επιλογές για τη συγκεκριμένη κορυφή, η τιμή της μεταβλητής **2keno** μηδενίζεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται για την επόμενη κορυφή, μέχρι να ελεγχθούν όλες οι κορυφές.

<table border="1"> <thead> <tr> <th>perso</th> <th>FINAL PERSONS</th> <th>FINAL TASKS</th> <th>tasks</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1 A</td> <td>1 C</td> <td>1 2</td> <td>1 5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>2 B</td> <td>2 4</td> <td>2 1</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td>3 3</td> </tr> <tr> <td>4 D</td> <td></td> <td></td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>5 E</td> <td></td> <td></td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>+ length: 5</td> <td>+ length: 2</td> <td>+ length: 2</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>people 5</td> <td></td> <td></td> <td>7</td> </tr> <tr> <td>maxtasks 3</td> <td></td> <td></td> <td>8</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>9</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>10 3</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>11 1</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>12</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>13 3</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>14 5</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>15</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>+ length: 15</td> </tr> </tbody> </table>	perso	FINAL PERSONS	FINAL TASKS	tasks	1 A	1 C	1 2	1 5	2	2 B	2 4	2 1	3			3 3	4 D			4	5 E			5	+ length: 5	+ length: 2	+ length: 2	6	people 5			7	maxtasks 3			8				9				10 3				11 1				12				13 3				14 5				15				+ length: 15	<p>Σύμφωνα με την αρχική καταγραφή επιλογών ανά υπάλληλο, ο υπάλληλος C είχε μία μόνο επιλογή (την εργασία 2), η οποία του δόθηκε.</p> <p>Το όνομά του και η επιλογή που του αναλογεί εκχωρούνται στις τελικές λίστες FINAL PERSONS και FINAL TASKS.</p> <p>Διαγράφονται οι συγκεκριμένες τιμές από τη λίστα perso (τιμή C) και την λίστα tasks (τιμή 2).</p> <p>Διαγράφοντας τη δεσμευμένη εργασία 2 από τη λίστα των υπόλοιπων υπαλλήλων, προκύπτει μοναδική εργασία και για τον υπάλληλο B (εργασία 4).</p> <p>Ακολουθείται η ίδια διαδικασία για τον <u>υπάλληλο B</u> και την <u>εργασία 4</u>.</p>
perso	FINAL PERSONS	FINAL TASKS	tasks																																																																		
1 A	1 C	1 2	1 5																																																																		
2	2 B	2 4	2 1																																																																		
3			3 3																																																																		
4 D			4																																																																		
5 E			5																																																																		
+ length: 5	+ length: 2	+ length: 2	6																																																																		
people 5			7																																																																		
maxtasks 3			8																																																																		
			9																																																																		
			10 3																																																																		
			11 1																																																																		
			12																																																																		
			13 3																																																																		
			14 5																																																																		
			15																																																																		
			+ length: 15																																																																		

3. Ακολουθεί έλεγχος για πλήρες ταίριασμα μέσω της διαδικασίας **Check_for_complete_matching**, καθώς στο προηγούμενο βήμα (2) ενδέχεται όλες οι κορυφές να βρήκαν ταίρι. Σε περίπτωση πλήρους ταιριάσματος εμφανίζεται σχετικό μήνυμα και τα τελικά ζευγάρια καταχωρούνται στις λίστες **FINAL PERSONS** και **FINAL TASKS**. Σε αντίθετη περίπτωση, συνεχίζεται η αναζήτηση.

4. Στη συνέχεια, καλείται η διαδικασία **Calculate_sum_of_choices_per_element** για τον υπολογισμό του συνολικού πλήθους επιλογών ανά κορυφή και το άθροισμα αποθηκεύεται σε αντίστοιχα στοιχεία της λίστας **sum**.

Στο παράδειγμα, ο 4ος υπάλληλος **D** έχει συνολικά 2 επιλογές (στοιχεία 10 και 11 της λίστας **tasks**).

Συμπληρώνεται το πλήθος επιλογών του υπάλληλου **D** στο αντίστοιχο 4ο στοιχείο της λίστας **sum**.

5. Η διαδικασία **Match choices which appear only once** αναζητά επιλογές που αντιστοιχούν σε μία μόνο κορυφή, επιλογές δηλαδή που εμφανίζονται μία μόνο φορά στη λίστα **tasks**. Εάν παρουσιαστεί τέτοια περίπτωση, γίνεται υποχρεωτικό ταίριασμα κορυφής με αυτή την επιλογή.

- Η κορυφή και η αντίστοιχη επιλογή της προσθέτονται στις οριστικές λίστες **FINAL PERSONS** και **FINAL TASKS** (ταίριασμα). Επιπλέον, αντικαθίσταται η συγκεκριμένη κορυφή στη λίστα **perso** από κενό και τα στοιχεία της λίστας **TASKS** που είναι ίσα με την επιλογή που προστέθηκε στη λίστα **FINAL TASKS** αντικαθιστώνται με κενό. Η επιλογή αυτή δεν είναι πλέον διαθέσιμη για τους υπόλοιπους υποψήφιους.

Στο παράδειγμα δεν προκύπτει τέτοια περίπτωση, καθώς κάθε αδέσμευτη επιλογή (1, 3 και 5) της λίστας **tasks** συμπεριλαμβάνεται στις επιλογές περισσότερων του ενός ατόμων.

6. Εφόσον δεν έχει προκύψει πλήρες ταίριασμα, καλείται η διαδικασία **Init_match** που πραγματοποιεί το αρχικό ταίριασμα (initial matching). Ταίριαζει δηλαδή τις αδέσμευτες κορυφές με την πρώτη τους επιλογή, εάν αυτή είναι διαθέσιμη.

- Προσθέτει τα στοιχεία της λίστας **perso** που δεν είναι κενά στη λίστα **Initial People**
- Ξεκινώντας από το πρώτο άτομο, ελέγχει εάν η πρώτη επιλογή του υπάρχει ήδη στη λίστα **Initial Tasks** (αρχικά είναι κενή).
 - Εάν η συγκεκριμένη επιλογή δεν υπάρχει ήδη στη λίστα **Initial Tasks**:
 - την εισάγει στη λίστα **Initial Tasks**,
 - μειώνει το αντίστοιχο στοιχείο της λίστας **sum** κατά 1, αφού πλέον το άτομο έχει μία λιγότερη διαθέσιμη επιλογή

- εισάγει τον αριθμό **1** στο αντίστοιχο στοιχείο της λίστας **Current Task**, υποδεικνύοντας ότι το άτομο έχει αντιστοιχηθεί αυτή τη στιγμή με την πρώτη του επιλογή.
 - στο αντίστοιχο στοιχείο της λίστας **Pointer** εισάγεται ο αύξοντας αριθμός του ατόμου
- Εάν η συγκεκριμένη επιλογή υπάρχει ήδη στη λίστα **Initial Tasks**:
- εισάγει στη λίστα **Initial Tasks** ένα κενό χαρακτήρα
 - εισάγει στο αντίστοιχο στοιχείο της λίστας **Current Task** τον αριθμό **0**, υποδεικνύοντας ότι το άτομο δεν έχει αντιστοιχηθεί ακόμα με την πρώτη του επιλογή.
 - στο αντίστοιχο στοιχείο της λίστας **Pointer** εισάγεται ο αύξοντας αριθμός του ατόμου

<table border="1"> <thead> <tr><th>sum</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 2</td></tr> <tr><td>2 0</td></tr> <tr><td>3 0</td></tr> <tr><td>4 1</td></tr> <tr><td>5 2</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>perso</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 A</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>4 D</td></tr> <tr><td>5 E</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>FINAL PERSONS</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 C</td></tr> <tr><td>2 B</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>FINAL TASKS</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 2</td></tr> <tr><td>2 4</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>tasks</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 5</td></tr> <tr><td>2 1</td></tr> <tr><td>3 3</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>6</td></tr> <tr><td>7</td></tr> <tr><td>8</td></tr> <tr><td>9</td></tr> <tr><td>10 3</td></tr> <tr><td>11 1</td></tr> <tr><td>12</td></tr> <tr><td>13 3</td></tr> <tr><td>14 5</td></tr> <tr><td>15</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>Initial People</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 A</td></tr> <tr><td>2 D</td></tr> <tr><td>3 E</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>Initial Tasks</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 5</td></tr> <tr><td>2 3</td></tr> <tr><td>3</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>Pointer</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 1</td></tr> <tr><td>2 4</td></tr> <tr><td>3 5</td></tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr><th>Current Task</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1 1</td></tr> <tr><td>2 1</td></tr> <tr><td>3 0</td></tr> </tbody> </table>	sum	1 2	2 0	3 0	4 1	5 2	perso	1 A	2	3	4 D	5 E	FINAL PERSONS	1 C	2 B	FINAL TASKS	1 2	2 4	tasks	1 5	2 1	3 3	4	5	6	7	8	9	10 3	11 1	12	13 3	14 5	15	Initial People	1 A	2 D	3 E	Initial Tasks	1 5	2 3	3	Pointer	1 1	2 4	3 5	Current Task	1 1	2 1	3 0	<p>Για παράδειγμα, ο υπάλληλος A έχει αντιστοιχηθεί με την πρώτη του επιλογή (5) ενώ παράλληλα το στοιχείο 1 της λίστας sum μειώθηκε κατά 1 και της λίστας Current Task έγινε 1. Καθώς ο υπάλληλος A ήταν ο πρώτος υπάλληλος σε σειρά, καταχωρήθηκε στο αντίστοιχο στοιχείο της λίστας Pointer ο αύξοντας αριθμός 1.</p> <p>Όμοια και για τον υπάλληλο D.</p> <p>Αντίθετα, ο υπάλληλος E δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί με την πρώτη του επιλογή (3) επειδή την έχουμε ήδη ταιριάξει με τον υπάλληλο D. Το αντίστοιχο στοιχείο της λίστας Initial Tasks για τον υπάλληλο E παραμένει κενό, ενώ το στοιχείο Current Task του ορίζεται σε 0.</p>
sum																																																			
1 2																																																			
2 0																																																			
3 0																																																			
4 1																																																			
5 2																																																			
perso																																																			
1 A																																																			
2																																																			
3																																																			
4 D																																																			
5 E																																																			
FINAL PERSONS																																																			
1 C																																																			
2 B																																																			
FINAL TASKS																																																			
1 2																																																			
2 4																																																			
tasks																																																			
1 5																																																			
2 1																																																			
3 3																																																			
4																																																			
5																																																			
6																																																			
7																																																			
8																																																			
9																																																			
10 3																																																			
11 1																																																			
12																																																			
13 3																																																			
14 5																																																			
15																																																			
Initial People																																																			
1 A																																																			
2 D																																																			
3 E																																																			
Initial Tasks																																																			
1 5																																																			
2 3																																																			
3																																																			
Pointer																																																			
1 1																																																			
2 4																																																			
3 5																																																			
Current Task																																																			
1 1																																																			
2 1																																																			
3 0																																																			

7. Ακολουθεί η κλήση της διαδικασίας **Discard_sum_equal_to_zero**, η οποία εξασφαλίζει τη διαγραφή των μηδενικών στοιχείων από τη λίστα **sum**. Πρόκειται για στοιχεία που αντιστοιχούν σε άτομα που έχουμε ήδη ταιριάξει οριστικά και βρίσκονται πλέον στη λίστα **Final Persons**.

- Ελέγχονται διαδοχικά όλα τα στοιχεία της λίστας **sum** και διαγράφονται όσα έχουν μηδενική τιμή.

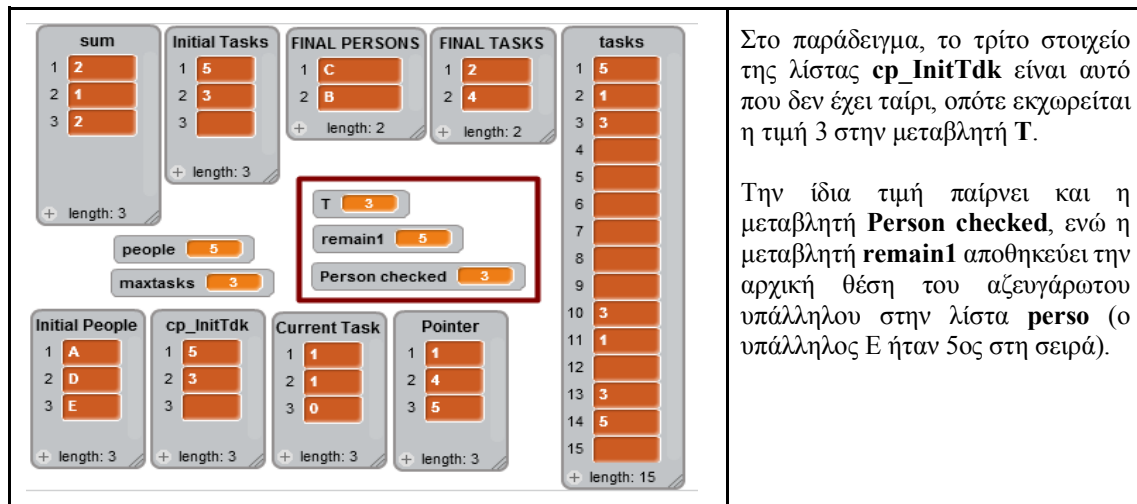
Στο προηγούμενο βήμα, τα στοιχεία 2 και 3 της λίστας **sum** είχαν μηδενική τιμή καθώς αντιστοιχούσαν στα άτομα **B** και **C** που έχουμε ταιριάξει οριστικά.

Για τον λόγο αυτό τα στοιχεία αυτά διαγράφηκαν εντελώς από τη λίστα και παρέμεινε μόνο το συνολικό πλήθος επιλογών των αταίριαστων υπάλληλων (A, D και E).

8. Μετά τον έλεγχο για πλήρες ταιρίασμα - κι εφόσον δεν έχει προκύψει ακόμα - καλείται η διαδικασία **Complete_Match** στην οποία:

- Δημιουργείται η λίστα **cp_initTdk** που αποτελεί αντίγραφο του αρχικού ταιριάσματος, προσθέτουμε δηλαδή όλα τα στοιχεία της λίστας Initial Tasks. Στη νέα λίστα **cp_initTdk** θα γίνονται τυχόν αντικαταστάσεις επιλογών ανά άτομο.

- Ακολουθεί ο εντοπισμός του αζευγάρωτου υπάλληλου στη λίστα **cp_InitTdk** με τη βοήθεια της διαδικασίας **Search_for_unmatched_person**:
 - Ελέγχονται τα στοιχεία της λίστας **cp_InitTdk** μέχρι να εντοπιστεί κενό στοιχείο, άρα πρόκειται για τον υπάλληλο που - προς το παρόν - δεν έχει ταιρί.
 - Καταχωρείται ο αύξοντας αριθμός του κενού στοιχείου στη μεταβλητή **T**, στη μεταβλητή **Person checked** και ορίζεται η μεταβλητή **remain1** στο στοιχείο **T** της λίστας **pointer** (ώστε να ξέρουμε σε ποιά θέση της λίστας **perso** βρίσκεται ο αζευγάρωτος υπάλληλος κι επομένως ποιές επιλογές της λίστας **tasks** του αντιστοιχούν).



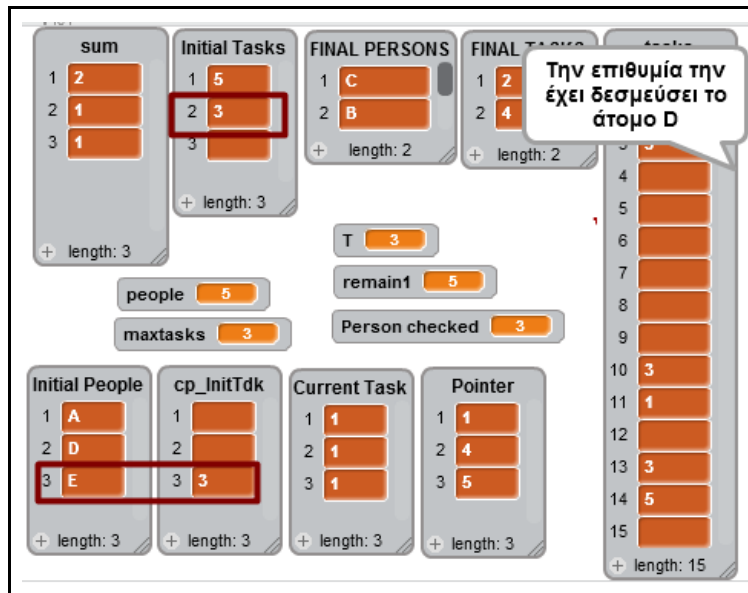
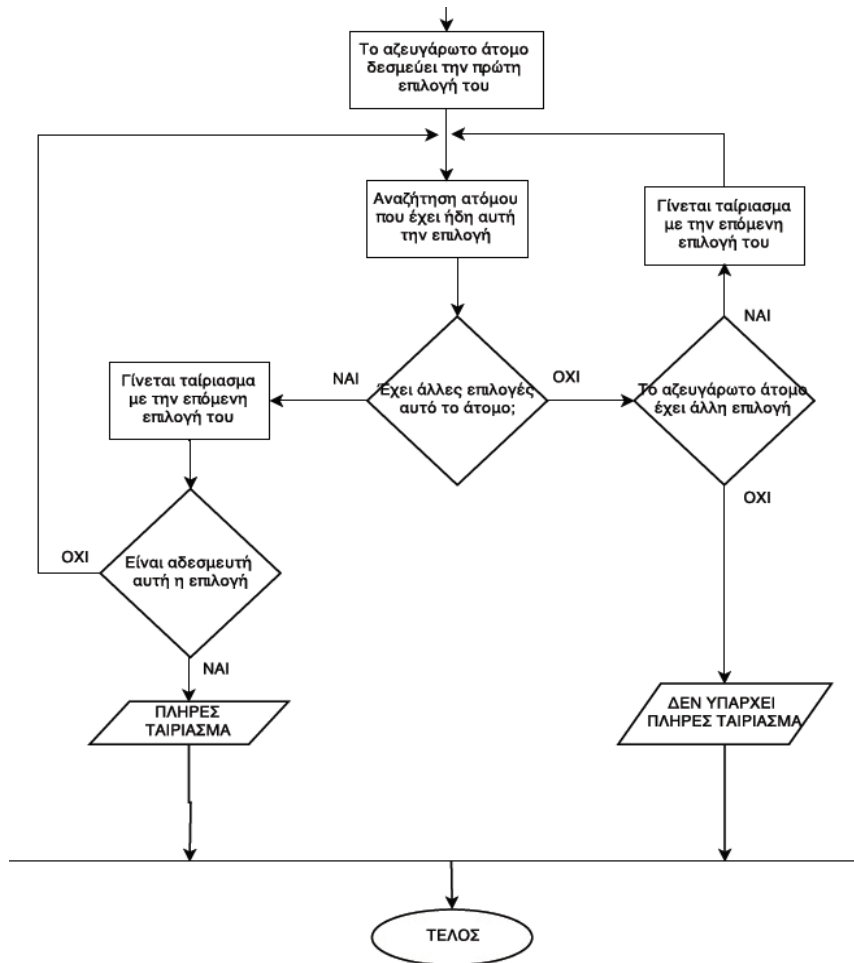
Στο παράδειγμα, το τρίτο στοιχείο της λίστας **cp_InitTdk** είναι αυτό που δεν έχει ταιρί, οπότε εκχωρείται η τιμή 3 στην μεταβλητή **T**.

Την ίδια τιμή παίρνει και η μεταβλητή **Person checked**, ενώ η μεταβλητή **remain1** αποθηκεύει την αρχική θέση του αζευγάρωτου υπάλληλου στην λίστα **perso** (ο υπάλληλος E ήταν 5ος στη σειρά).

- Αρχικά, πραγματοποιείται αναζήτηση διαθέσιμης επιλογής για τον αζευγάρωτο υπάλληλο από το σύνολο των επιλογών του. Ελέγχονται με τη βοήθεια των μεταβλητών **remain1** και **Person checked** όλες οι διαθέσιμες επιλογές του αζευγάρωτου υπάλληλου.
 - Εάν υπάρχει διαθέσιμη επιλογή, που δεν περιέχεται δηλαδή ήδη στη λίστα **cp_InitTdk**, τότε την προσθέτουμε στην αντίστοιχη θέση της λίστας **cp_InitTdk** και προκύπτει πλήρες ταιρίασμα.
 - Εάν δεν υπάρχει διαθέσιμη επιλογή για το αζευγάρωτο άτομο, καλείται η διαδικασία **Searching_for_alternating_path** για την αναζήτηση εναλλακτικού μονοπατιού (alternating path).

Σύμφωνα με διαδικασία **Searching_for_alternating_path**, αν μπορεί να αποδεσμευτεί η πρώτη αρχικά επιλογή του αζευγάρωτου υπάλληλου από κάποιον άλλο υπάλληλο που έχει κι άλλες δυνατές επιλογές, γίνεται ταιρίασμα με την επόμενη δυνατή επιλογή του. Το παραπάνω βήμα επαναλαμβάνεται μέχρι να προκύψει πλήρες ταιρίασμα ή να έχουν εξαντληθεί όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί (εναλλακτικά μονοπάτια).

Η διαδικασία **Searching_for_alternating_path** μπορεί να γίνει πιο κατανοητή βλέποντας το τμήμα του λογικού διαγράμματος που της αντιστοιχεί:



Στο παράδειγμα, ο αζευγάρωτος υπάλληλος **E** δεσμεύει την πρώτη επιλογή του **3** και την προσθέτει στη λίστα **cp_InitTdk**.

Η επιλογή **3** δεν είναι διαθέσιμη, την έχει ήδη ο υπάλληλος **D** (λίστα **Initial Tasks**).

Η επόμενη επιλογή **1** του υπάλληλου **D** είναι διαθέσιμη, οπότε γίνεται ταίριασμα του **D** με την επόμενη επιλογή του.

<table border="1"> <tr><th colspan="2">sum</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 3</td></tr> </table>	sum		1	2	2	0	3	1	+ length: 3		<table border="1"> <tr><th colspan="2">perso</th></tr> <tr><td>1</td><td>A</td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>D</td></tr> <tr><td>5</td><td>E</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 5</td></tr> </table>	perso		1	A	2		3		4	D	5	E	+ length: 5		<table border="1"> <tr><th colspan="2">FINAL PERSONS</th></tr> <tr><td>1</td><td>C</td></tr> <tr><td>2</td><td>B</td></tr> <tr><td>3</td><td>A</td></tr> <tr><td>4</td><td>D</td></tr> <tr><td>5</td><td>E</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 5</td></tr> </table>	FINAL PERSONS		1	C	2	B	3	A	4	D	5	E	+ length: 5		<table border="1"> <tr><th colspan="2">FINAL TASKS</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 5</td></tr> </table>	FINAL TASKS		1	2	2	4	3	5	4	1	5	3	+ length: 5		<table border="1"> <tr><th colspan="2">tasks</th></tr> <tr><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td></tr> <tr><td>12</td><td></td></tr> <tr><td>13</td><td>3</td></tr> <tr><td>14</td><td>5</td></tr> <tr><td>15</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 15</td></tr> </table>	tasks		1	5	2	1	3	3	4		5		6		7		8		9		10	3	11	1	12		13	3	14	5	15		+ length: 15	
sum																																																																																										
1	2																																																																																									
2	0																																																																																									
3	1																																																																																									
+ length: 3																																																																																										
perso																																																																																										
1	A																																																																																									
2																																																																																										
3																																																																																										
4	D																																																																																									
5	E																																																																																									
+ length: 5																																																																																										
FINAL PERSONS																																																																																										
1	C																																																																																									
2	B																																																																																									
3	A																																																																																									
4	D																																																																																									
5	E																																																																																									
+ length: 5																																																																																										
FINAL TASKS																																																																																										
1	2																																																																																									
2	4																																																																																									
3	5																																																																																									
4	1																																																																																									
5	3																																																																																									
+ length: 5																																																																																										
tasks																																																																																										
1	5																																																																																									
2	1																																																																																									
3	3																																																																																									
4																																																																																										
5																																																																																										
6																																																																																										
7																																																																																										
8																																																																																										
9																																																																																										
10	3																																																																																									
11	1																																																																																									
12																																																																																										
13	3																																																																																									
14	5																																																																																									
15																																																																																										
+ length: 15																																																																																										
<table border="1"> <tr><td>people</td><td>5</td></tr> <tr><td>maxtasks</td><td>3</td></tr> </table>					people	5	maxtasks	3																																																																																		
people	5																																																																																									
maxtasks	3																																																																																									
<table border="1"> <tr><th colspan="2">Initial People</th></tr> <tr><td>1</td><td>A</td></tr> <tr><td>2</td><td>D</td></tr> <tr><td>3</td><td>E</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 3</td></tr> </table>	Initial People		1	A	2	D	3	E	+ length: 3		<table border="1"> <tr><th colspan="2">cp_InitTdk</th></tr> <tr><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 3</td></tr> </table>	cp_InitTdk		1		2	1	3	3	+ length: 3		<table border="1"> <tr><th colspan="2">Current Task</th></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 3</td></tr> </table>	Current Task		1	1	2	2	3	1	+ length: 3		<table border="1"> <tr><th colspan="2">Pointer</th></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td colspan="2">+ length: 3</td></tr> </table>	Pointer		1	1	2	4	3	5	+ length: 3																																																
Initial People																																																																																										
1	A																																																																																									
2	D																																																																																									
3	E																																																																																									
+ length: 3																																																																																										
cp_InitTdk																																																																																										
1																																																																																										
2	1																																																																																									
3	3																																																																																									
+ length: 3																																																																																										
Current Task																																																																																										
1	1																																																																																									
2	2																																																																																									
3	1																																																																																									
+ length: 3																																																																																										
Pointer																																																																																										
1	1																																																																																									
2	4																																																																																									
3	5																																																																																									
+ length: 3																																																																																										

Στη λίστα `cp_InitTdk` έχουν δεσμευθεί οι επιλογές **1** και **3** για τους υπάλληλους **D** και **E** αντίστοιχα.

Εφόσον στις επιλογές του υπάλληλου **A** συμπεριλαμβάνεται η αδέσμευτη επιλογή **5**, τη δεσμεύει και καταλήγουμε σε πλήρες ταίριασμα.

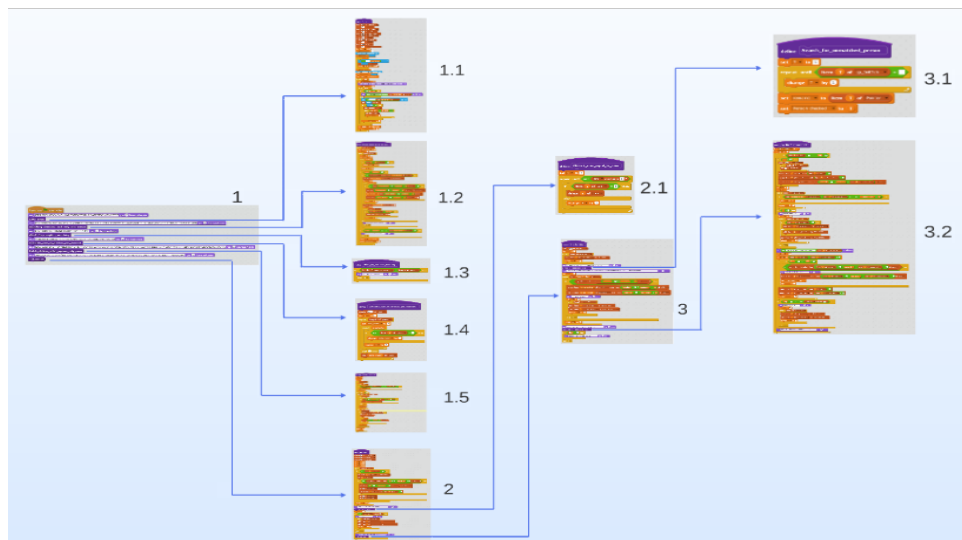
Λογικό Διάγραμμα

Το λογικό διάγραμμα που απεικονίζει όλα τα βήματα του παραπάνω αλγόριθμου είναι προσβάσιμο στον ακόλουθο σύνδεσμο:

https://drive.google.com/file/d/0B_jQOhJLJdkWTFdkTjFBOWxPZ1k/view?usp=sharing

Διάγραμμα Κώδικα

Για την κατανόηση των λειτουργιών προτείνεται να επισκεφθείτε τον παρακάτω σύνδεσμο (http://prezi.com/oegcwiqeihoe/?utm_campaign=share&utm_medium=copy), όπου παρουσιάζονται τα διάφορα τμήματα του κώδικα και ο τρόπος που συνδέονται μεταξύ τους.



Ο κώδικας σε Scratch

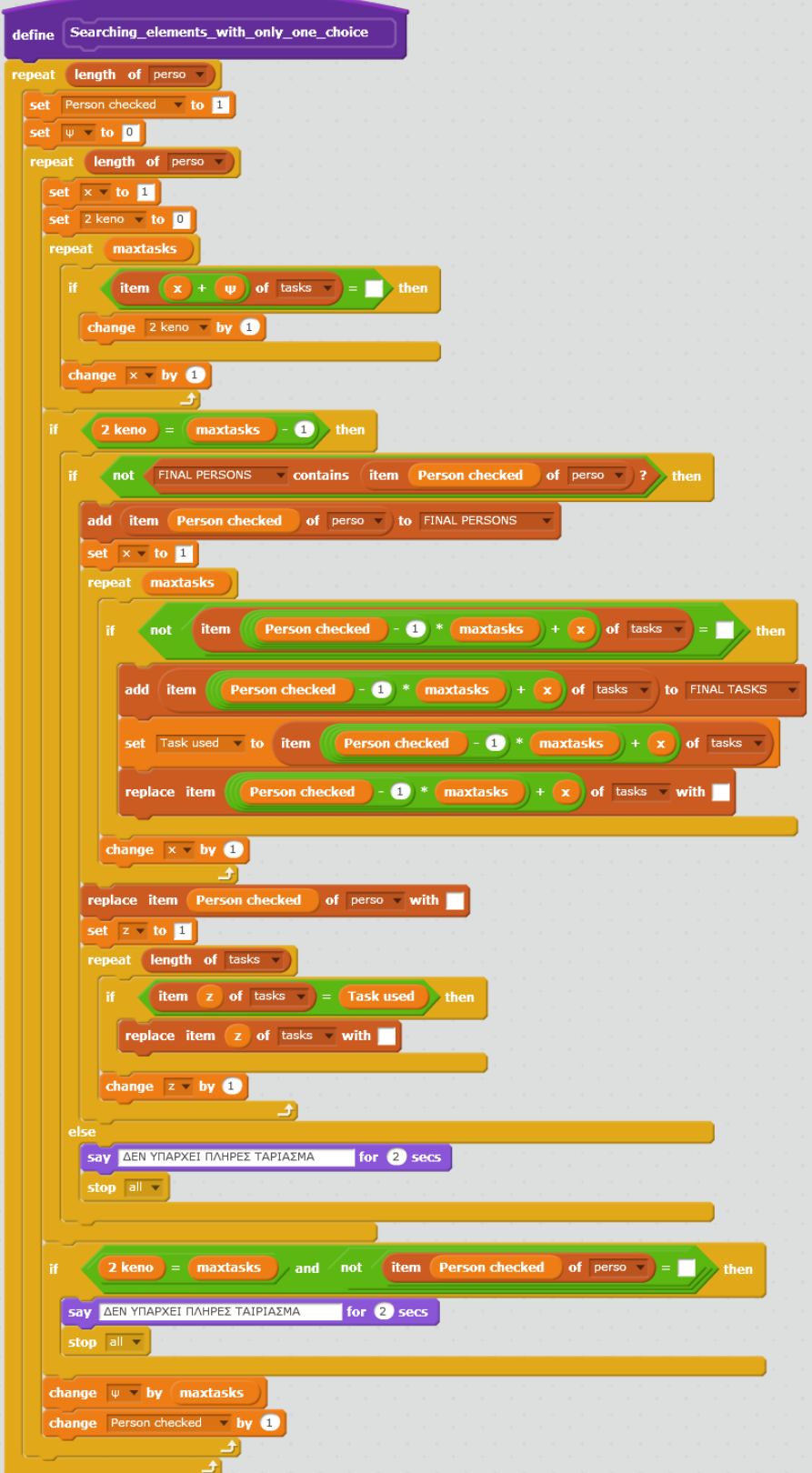
1

The image shows a Scratch script with the following blocks:

- Όταν στο **γίνε κλικ**
- περ **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΕ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΛΙΣΤΕΣ** για 2 δευτερόλεπτα
- Data_Entry**
- περ **ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΑΤΟΜΑ ΜΕ ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΕΠΙΘΥΜΙΑ, ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΕΠΙΘΥΜΙΑΣ, ΔΙΑΓΡΑΦΗ ΕΠΙΘΥΜΙΑΣ ΑΠΟ ΛΙΣΤΑ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ ΑΤΟΜΩΝ** για 2 δευτερόλεπτα
- Searching_elements_with_only_one_choice**
- περ **ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΠΙΘΑΝΟ ΠΛΗΡΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ** για 2 δευτερόλεπτα
- Check_for_complete_matching**
- περ **ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΕΠΙΘΥΜΙΩΝ ΑΝΑ ΑΤΟΜΟ** για 2 δευτερόλεπτα
- Calculate_sum_of_choices_per_element**
- περ **ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ΕΠΙΘΥΜΙΕΣ ΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΟΝΤΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΜΙΑ ΜΟΝΟ ΦΟΡΑ. ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ, ΓΙΝΕΤΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΑ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΣΤΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΑΤΟΜΑ** για 2 δευτερόλεπτα
- Match_choices_which_appear_only_once**
- περ **ΑΡΧΙΚΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ (INITIAL MATCHING) - ΑΝ ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΘΕΣΙΜΗ Η 1η ΕΠΙΘΥΜΙΑ ΣΕ ΚΑΘΕ ΑΤΟΜΟ, ΓΙΝΕΤΑΙ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ.** για 2 δευτερόλεπτα
- Init_match**

1.1

```
define Data_Entry
  delete all of Current Task
  delete all of Pointer
  delete all of Initial People
  delete all of Initial Tasks
  delete all of FINAL PERSONS
  delete all of FINAL TASKS
  delete all of sum
  delete all of cp_InitTdk
  delete all of tasks
  delete all of perso
  delete all of person_has_tasks
  set people to 0
  set repeat_beg to 1
  ask How Many People? and wait
  set people to answer
  repeat people
    ask join Name repeat_beg and wait
    add answer to perso
    change repeat_beg by 1
  set repeat_beg to 1
  ask Max Number Of Tasks? and wait
  set maxtasks to answer
  set repat28 to maxtasks
  repeat people
    set sum_count to 0
    say Type Space if you have inserted all the tasks of a person for 1 secs
    set rep_asks to 1
    repeat repat28
      if 0 = repat28 then
        say join no more tasks specified for item repeat_beg of perso for 0.3 secs
      else
        ask join Tasks of item repeat_beg of perso and wait
        add answer to tasks
        if answer = then
          delete last of tasks
          repeat maxtasks - rep_asks - 1
            add to tasks
            set repat28 to 0
          change rep_asks by 1
        set repat28 to maxtasks
        change repeat_beg by 1
```



1.3

```
define Check_for_complete_matching
  if length of FINAL PERSONS = length of perso then
    say ΠΛΗΡΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ for 2 secs
  stop all
```

1.4

```
define Calculate_sum_of_choices_per_element
  delete all of sum
  set x to 1
  repeat length of perso
    set sum_count to 0
    repeat maxtasks
      if not item x of tasks = then
        change sum_count by 1
        change x by 1
    wait 1 secs
    add sum_count to sum
```

```

define Match_choices_which_appear_only_once
  set Counter 2 to 0
  set p to 1
  set c to 1
  set ψ to 1
  repeat length of tasks
    set x to 1
    repeat length of tasks
      if item p of tasks = item c of tasks and not item c of tasks = [ ] then
        change Counter 2 by 1
      change p by 1
    if Counter 2 = 1 then
      add item c of tasks to FINAL TASKS
      repeat length of perso
        repeat maxtasks
          if item x - 1 * maxtasks + ψ of tasks = item c of tasks then
            add item x of perso to FINAL PERSONS
            change ψ by 1
          change x by 1
          set ψ to 1
        set y to 1
        repeat length of perso
          Προσθήκη ατόμου με μοναδική επιλογή σε τελική λίστα, διαγραφή ονόματός του
          if FINAL PERSONS contains item y of perso ? then
            replace item y of perso with [ ]
            replace item y of sum with 0
            set x to 1
            repeat maxtasks
              replace item y - 1 * maxtasks + x of tasks with [ ]
              change x by 1
            change y by 1
      set Counter 2 to 0
      change c by 1
      set p to 1
  
```

```

define Init_match
  delete all of Current Task
  delete all of Initial People
  delete all of Initial Tasks
  set p to 1
  set I to 1
  set T to
  repeat length of perso
    if not item p of perso = then
      add item p of perso to Initial People
      add p to Pointer
      if not Initial Tasks contains item (p - 1 * maxtasks + 1) of tasks ? then
        add item (p - 1 * maxtasks + 1) of tasks to Initial Tasks
        add 1 to Current Task
        replace item p of sum with item p of sum - 1
      else
        add to Initial Tasks
        add 0 to Current Task
      change p by 1
  say ΔΙΑΓΡΑΦΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΕΠΙΘΥΜΙΩΝ for 2 secs
  Discard_sum_equal_to_zero
  set I to 1
  if not Initial Tasks contains ? then
    say ΠΛΗΡΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ for 3 secs
    repeat length of Initial Tasks
      add item I of Initial Tasks to FINAL TASKS
      add item I of Initial People to FINAL PERSONS
      change I by 1
    stop all
  else
    say ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΠΛΗΡΟΥΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΟΣ for 2 secs
    Complete_Match

```

2.1

```
define Discard_sum_equal_to_zero
  set v to 1
  repeat until not sum contains 0 ?
    if item v of sum = 0 then
      delete v of sum
    else
      change v by 1
```

3

```
define Complete_Match
  delete all of cp_InitTdk
  set T to 1
  repeat length of Initial Tasks
    add item T of Initial Tasks to cp_InitTdk
    change T by 1
  say ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΑΤΟΜΟΥ ΧΩΡΙΣ ΑΡΧΙΚΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ for 2 secs
  Search_for_unmatched_person
  say ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝ ΤΟ ΑΤΑΙΡΙΑΣΤΟ ΑΤΟΜΟ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΣΤΙΣ ΕΠΙΘΥΜΙΕΣ ΤΟΥ ΚΑΠΟΙΑ ΑΔΕΣΜΕΥΤΗ ΕΠΙΘΥΜΙΑ. for 2 secs
  set x to 1
  repeat item Person checked of sum
    if not cp_InitTdk contains item remain1 - 1 * maxtasks + x of tasks ? then
      replace item Person checked of cp_InitTdk with item remain1 - 1 * maxtasks + x of tasks
      replace item Person checked of Initial Tasks with item remain1 - 1 * maxtasks + x of tasks
      say ΠΛΗΡΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ for 3 secs
      set I to 1
      repeat length of Initial Tasks
        add item I of cp_InitTdk to FINAL TASKS
        add item I of Initial People to FINAL PERSONS
        change I by 1
      stop all
      change x by 1
  say ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ for 2 secs
  Searching_for_alternating_path
  if flag = 0 then
    say ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΠΛΗΡΕΣ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ for 2 secs
  stop all
```


3.1

```
define Search_for_unmatched_person
  set T to 1
  repeat until (item T of cp_InitTdk = [ ]
    change T by 1
  set remain1 to item T of Pointer
  set Person checked to T
```

The image shows a Scratch code block for a function named "Search_for_unmatched_person". The function starts with a "define" block. It then sets a variable "T" to 1. A "repeat until" loop follows, with the condition "item T of cp_InitTdk = []". Inside the loop, there is a "change T by 1" block. After the loop, there are two "set" blocks: "set remain1 to item T of Pointer" and "set Person checked to T".

```

define Searching_for_alternating_path
  set Person checked to T
  set flag to 0
  repeat until item T of sum = 0 and flag = 0
  if flag = 0 then
    delete all of cp_InitTk
    repeat length of Initial Tasks
    add to cp_InitTk
    replace item T of sum with item T of sum - 1
    replace item T of Current Task with item T of Current Task + 1
    replace item T of cp_InitTk with item remain1 - 1 * maxtasks + item T of Current Task of tasks
  set i to 1
  set p to 0
  repeat length of cp_InitTk
  if item Person checked of cp_InitTk = item i of Initial Tasks and not Person checked = i then
    set p to i
    change i by 1
  if p = 0 then
    say ΠΑΗΡΕΕ ΤΑΙΡΙΑΖΜΑ for 2 secs
    set i to 1
    repeat length of Initial Tasks
    if item i of cp_InitTk = 1 then
      add item i of Initial Tasks to FINAL TASKS
    else
      add item i of cp_InitTk to FINAL TASKS
    add item i of Initial People to FINAL PERSONS
    change i by 1
    stop all
  say join Την επιθυμία της Έγης Σουζέσσα το άρτοιο item p of Initial People for 2 secs
  set flag to 0
  set try to item p of sum - item p of Current Task + 1
  repeat until flag = 1 or try < 0
  if not cp_InitTk contains item item p of Pointer - 1 * maxtasks + item p of Current Task + 1 of tasks ? then
    say ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΕΠΙΘΥΜΙΑΣ for 2 secs
    replace item p of cp_InitTk with item item p of Pointer - 1 * maxtasks + item p of Current Task + 1 of tasks
    set Person checked to p
    set flag to 1
    replace item p of sum with item p of sum - 1
    replace item p of Current Task with item p of Current Task + 1
    change try by -1
  if flag = 1 and not cp_InitTk contains 1 ? then
    say ΠΑΗΡΕΕ ΤΑΙΡΙΑΖΜΑ for 2 secs
    set i to 1
    repeat length of cp_InitTk
    add item i of cp_InitTk to FINAL TASKS
    add item i of Initial People to FINAL PERSONS
    change i by 1
    stop all
  say ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΥ ΜΟΝΟΠΑΤΙΟΥ for 2 secs

```

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κλείνοντας την παρούσα εργασία θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τις επιβλέπουσες καθηγήτριές μας που με υπομονή και συνέπεια προσπάθησαν να μας εισάγουν στον κόσμο των Μαθηματικών και της Πληροφορικής, καθώς και τους γονείς μας που μας στήριξαν σε αυτήν μας τη προσπάθεια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Phillip Hall, On Representatives of subsets, J. London Math, Soc., 10 (1): 26-30, 1935.
- [2] Grade 6 Math Circles, Graph Theory, Centre for Education in Mathematics and Computing, University of Waterloo, Canada: http://www.cemc.uwaterloo.ca/events/mathcircles/2015-16/Fall/Junior6_Nov18.pdf
- [3] K.M. Koh, F.M. Dong, E.G. Tay, Graphs and Their Applications , Mathematical Medley I Volume 33 No. 2, December 2006.
- [4] Susie Jameson, Edexcel AS and A Level Modular Mathematics Decision Mathematics 1 D1 (Edexcel GCE Modular Maths), Pearson.
- [5] Maximum matching algorithm σε python, c++, Java: <http://www.geeksforgeeks.org/maximum-bipartite-matching/>
- [6] The Euler Archive, <http://eulerarchive.maa.org//pages/E053.html>